を伺い，次に現在までの経過と核研ESで行う実験の見込し，さらにStRの原理，StRとSORの研究計画，外国の事情，StRのマシンについての講演を伺い，上に述べた研究計画とStRの接点を探り出す自由討議を行って頂けば今回の研究会の所期の目的を達せられるものと考えます。よろしくお願い申上げます。

最後にStRに関するINS－SORの三原則を揚げておきます。

1. 全国共同利用の施設であること。
2. StRのマシンタイムは原則的にSOR専用であること。
3. StRは超高真空使用のビーム寿命が十分長いものであること。

以　　上

S. O. R. の 理 論

沢 田 克 郎（東教大理）

SoRの理論は1946～56位の間に色々な人々による計算がでている。之等を一まとめにして，Landau－Lifschitz の Classical Theory of Fields（1962, 2nd Ed）に従ってまとめてみた。

参照論文は　小　塩　Buturi 22 No.5 '67

J.Schwinger , Phys Rev 75, 1912 (1949)

W.Heitler , Quantum Theory of Radiation

K.C.Westfold, Astrophys J. 130 241 '59

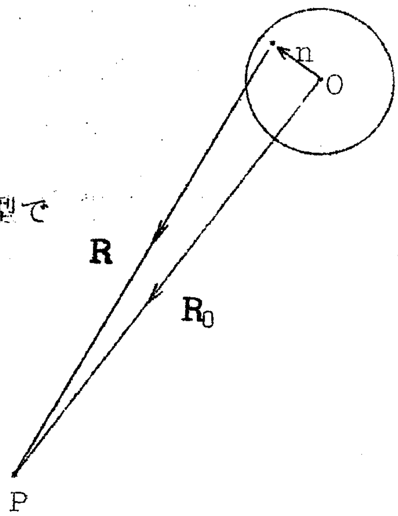
Olsen , K.Norske Vidensk Selok SK Nr 5 ('52)

である。夫々の論文にでてくる式に出会う毎にその旨書く事にしよう。

尚，各節の題目の§，の右の（　）の中は，Landau－Lifschitz の本の§，

I．電荷から遠く離れた所の場　（§．66－L－L）

微少電荷の位置からはかった距離を，図の様に電荷がひろがっていて，中心を原点にとり，（0）場をしらべる位置をP，微少電荷のある所を $\mathbf{r}$ とすると，$|\mathbf{R}_0|$ が十分大きいと



$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \fallingdotseq R_0 - \mathbf{nr} \quad (1.1)$$

但し
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0} \quad (1.2)$$

スカラー・ベクトル　ポテンシアルはRetarded型で

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R} dV \fallingdotseq \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}} dV \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A} \fallingdotseq \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}} dV \quad (1.4)$$

となる。

十分 $|\mathbf{R}_0|$ が大きく，Pの近くでは自由空間と考えられる所では，波は平面波と考えられるから $\mathbf{A}$ は $t-\frac{R_0}{c}$ のみの函数で（何故なら $\Box\mathbf{A}=0$）あるから

$$\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}' \quad (1.5)$$

（但し $'$ は $t-\frac{R_0}{c}$ についての微分）で，この事を考に入れると

$$\mathbf{H} = \nabla\left(t-\frac{R_0}{c}\right)\times\mathbf{A}' = -\frac{\mathbf{n}}{c}\times\mathbf{A}' = \frac{1}{c}\mathbf{A}'\times\mathbf{n} \quad (1.6)$$

であり（当然 $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}$ となる）

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}\times\mathbf{n}\left(=\frac{1}{c}((\mathring{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n})\right) \quad (1.7)$$

ともかける。

Ⅱ. Dipole Radiation（遠くの場）　（§, 67−L−L）

（1.4）を $|\mathbf{R}_0|$ が大きいとして $\frac{\mathbf{nr}}{c}$ をてんかいして

$$\mathbf{A} = \frac{1}{CR_0}\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}}\, dV + \cdots \tag{2.1}$$

とかけるから，初項のみをとると，点電荷を考えて，

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{V}_e(t), \quad \rho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t)) \tag{2.2}$$

（但し，eをつけたのは electron といういみ）を代入すると

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{CR_0}\, e\, \mathbf{V}_e\left(t-\frac{R_0}{c}\right) \tag{2.3}$$

$t-\frac{R_0}{c}$ は electron の時刻で t' とすると

$$= \frac{1}{CR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{2.4}$$

とかける。ここで $\mathbf{d}$ は electron の dipole moment

この $\mathbf{A}$ によって $\mathbf{H}$，$\mathbf{E}$ を（1.6）（1.7）で作り，poyntying vector の式に入れると，半径 R_0 の表面を単位時間に通ってでてゆくエネルギーは

$$dI\left(\equiv \frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})R_0^2\, dO = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{H})^2(\mathbf{n}\, dO)\cdot R_0^2 \tag{2.5}$$

（但し dO は surface の微少立体角。）より（$\mathbf{n} /\!/ dO$）

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2\, dO = \frac{(\ddot{\mathbf{d}})^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, dO \tag{2.6}$$

であり，surface Int すると

$$I = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}})^2 = \frac{2e^2}{3c^3}(\mathbf{W})^2 \tag{2.7}$$

$$\left(\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}_e\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}{dt}\right)$$

という周知の dipole radiation になる。

§3. 早く運動している電荷より輻射　（§，73，L−L）

上の dipole 輻射は $v/c \ll 1$ で成立つが，特に粒子が考えている時刻に静止している時には正しい式である。

「簡単には

$$\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}}\, dV = \int e\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}\right)\right)\cdot \mathbf{v}_e\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}\right) dV$$

故，　$\mathbf{r} = \mathbf{r}_e\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}\right)$ は t のかんすう。しかし

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \left(1+\frac{\mathbf{n}}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}_e\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}\right) = \left(1+\frac{\mathbf{n}}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\cdot \mathbf{v}_e\left(t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}\right)$$

$\therefore\ v_e = 0$ ならば $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$　　$\therefore$　$\mathbf{r}$ は constant で R_0 に absorb してよい。何故なら $R_0 \to \infty$ の近くを考えているから。故に

$$\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{nr}}{c}}\, dV \Longrightarrow \int e\,\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e\left(t-\frac{R_0}{c}\right)\right) \mathbf{v}_e\left(t-\frac{R_0}{c}\right) dV$$

となり，（2.1）に（2.2）を代入したものと同じ。」

この様な座標系での acceleratin を $\mathbf{w}_0$ とすると，（2.7）より $d\Pi = d\epsilon/dt$ 故 dt 秒に surface をとほって出てゆくエネルギーは

$$d\epsilon = \frac{2e^2}{3c^3}(\mathbf{w}_0^2)\,dt \tag{3.1}$$

又，この系は dipole radiation をしているので radiation のもってゆく total momentum は 0：

$$d\mathbf{P} = 0 \tag{3.2}$$

そこで，系を電子が動いている所にうつすと，

$$\left(P_4 = \frac{i\epsilon}{c},\ U_k = \frac{\partial x_k}{\partial s},\ ds = c\ dt\sqrt{1-v^2/c^2},\ x_4 = ict \right)$$

4元ベクトルとして静止系で(3.1)(3.2)になるものとして

$$dP_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i\, ds \tag{3.3}$$

但し繰返しの index(例えばk)は和を意味する。故にこれの積分として,

$$\triangle P_i = \int \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 u_i\, ds \tag{3.4}$$

が radiate されるエネルギー($i=4$)運動量($i=1\sim3$)をあたえる。

(3.3)は Schwinger の(I・3)である。(但し,Sの definition が $ds = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$)特にエネルギーは

$$\triangle\epsilon = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{W^2 - \dfrac{(\mathbf{V}\times\mathbf{W})^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^3}\, dt \tag{3.5}$$

となるが,W(t)のtでの積分であるから,electron の時刻についての積分である事に注意しておく。ここで,電子の式

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right)$$

$$\mathring{\mathbf{V}} = \mathbf{W} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right) - \frac{\mathbf{V}(\mathbf{V}\mathbf{E})}{c^2}\right) \tag{3.6}$$

を使うと,

$$\triangle\epsilon = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\mathbf{V})^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{3.7}$$

となり，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ として外場をとれば（電子の作った場も（3.6）にははいってくるが，之は電子の質量等をかえるものと，次にのべる，radiation damping の力故一応 omit する。）（3.7）より毎秒 radiate されるエネルギーが $\int_{-\infty}^{\infty}$ をはずせば外場の函数としてわかる。（但し再び注意としては dt は電子の時刻について，故に毎秒は電子の毎秒；観測者では之がのびている。（Ⅱ節参照）。

Ⅱ．近くの場．電子軌道に対する，輻射を出すことの反作用

§4．Radiation damping

(i) 非相対論的場合　（§．75 L−L）

ϕ と $\mathbf{A}$ の（retarded 型の）式で電荷の速度が c にくらべて小さいとすると，$\frac{R}{c}$ の時刻の間に余り電荷分布は変らないから，（1.1）で，$t-\frac{R}{c}$ を R/c でてんかいして，

$$\phi=\int\frac{\rho_{t-\frac{R}{c}}}{R}dV=\int\frac{\rho dV}{R}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho_t dV+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho_t dV-\boxed{\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\, dV}+\cdots \tag{4.1}$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\rho_t\mathbf{V}}{R}dV-\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho_t\mathbf{V}\, dV}+\cdots$$

と展開できる。

ここで $\mathbf{A}$ は $\frac{1}{c}\mathbf{A}$ の形で電子の運動にえいきようをあたえる事を考に入れると，$\boxed{}$ でかこったものが同程度の力を電子にあたえるから，$\boxed{}$ のみを考えてみる。（他の項は電子の“自己エネルギー”にきよする，Heitler 参照）。Gauge を $\phi=0$ になる様に

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\mathrm{grad}\, f,\quad \phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

という f を加えると，$f=-\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV$ で $\phi'=0$ となるから，

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}_t dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2 \rho_t dV$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}_t dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\ \rho_t dV$$

点電荷に移して（$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$）

$$(\rho_t = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)),\quad \mathbf{j}_t = \rho_t \mathbf{V}_e(t))$$

$$= -\frac{1}{c^2} e\dot{\mathbf{V}} + \frac{1}{3c^2} e\dot{\mathbf{V}} = -\frac{2}{3c^2} e\dot{\mathbf{V}} \tag{4.2}$$

之に対する magnetic fcild は $\mathbf{A}'$ は $\mathbf{V}$ に比例し，之は $\mathbf{R}_0$ をふくまぬ故

$$\nabla \times \mathbf{A}' = 0 \tag{4.3}$$

である。又 $\mathbf{A} = \dfrac{2}{3C^2}\dddot{\mathbf{d}}$

となり，電子は

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{V}} \tag{4.4}$$

の力をうける。この力でする仕事は

$$\mathbf{f}\mathbf{V} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}) - \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{V}})^2\right)$$

であるから，時間平均は

$$\left(\overline{\frac{d\varepsilon_{electron}}{dt}}\right)\mathbf{f}\mathbf{V} = -\frac{2e^2}{3c^3}(\mathbf{W})^2 \tag{4.5}$$

であって，之は§２の radiation としてでてくる energy の sign 逆のものである。この damping force がいみをもつのは電子の静止系で

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2} \quad (\lambda：波の波長)，\quad H \ll \frac{m^2c^4}{e^3} \quad (H：磁場)$$

の時にかぎる。

(ii) 相対論的場合。この時は，運動方程式は

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F^{\ell}_{ik}u_k + g_i \qquad (F^e：外場) \tag{4.6}$$

の形に，g_i という damping force がはいる筈であるが，$v \ll c$ では(i)のと同じになる筈故

$$g_i \propto \frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2} \tag{4.7}$$

の形（之は（4.4）を書直して得られる）であるが，之は（4.6）の左から u_i をして得られる identity $g_i u_i$（i は和）$= 0$ を満さないから，之を満す様にした

$$g_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + u_i u_k \frac{d^2u_k}{ds^2}\right) \tag{4.8}$$

が正しい damping force になる。この式は Heitler の（18）式に対応する（但し，Heitler の本の式は C の power が誤っていて1次が正しい。）*

---

*) Heitler の $\mathbf{u}$ は $\dfrac{mc\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2\,\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{Heitler}} = \mu\mathbf{u}\ (\mu = mc^2)$

$$\left[\ mc\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{u}}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right|_{\mathrm{Heitler}}$$

故 $g_i = (4.8) \Longrightarrow \dfrac{2e^2}{3c}\dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{d^2\mathbf{u}}{ds^2} - \dfrac{\mathbf{u}}{\mu^2}\sum_1^4\left(\dfrac{d\mathbf{u}_i}{ds}\right)^2\right)\Big|_{\mathrm{Heitler}}.$

この式を

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^e_{ik} u_k$$

$$\frac{d^2u_i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^e_{ik}}{\partial x_\ell} u_k u_\ell + \frac{e^2}{m^2c^4} F^e_{ik} F^e_{ke} u_i$$

という，（gのない時の，即ち radiation damping を neglect した）電子の式を使って書直すと，

$$g_i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^\ell_{ik}}{\partial x_\ell} u_k u_\ell - \frac{2e^4}{3m^2c^5} F^\ell_{i\ell} F^\ell_{k\ell} u_k - \frac{2e^4}{3m^2c^5}(F^\ell_{k\ell} u_\ell)^2 u_i$$

となり，$\mathbf{E}$，$\mathbf{H}$ でかくと，

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{E}_e + \frac{1}{c}\mathbf{V}\times\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{H}_e\right\} +$$

$$+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{\mathbf{E}_e\times\mathbf{H}_e + \frac{1}{c}\mathbf{H}_e\times(\mathbf{H}_e\times\mathbf{V}) + \frac{1}{c}\mathbf{E}_e(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}_e)\right\} +$$

$$+\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{V}\cdot\left\{\left(\mathbf{E}_e+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}_c\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{V})^2\right\}$$

となる。この$\mathbf{f}$が $\mathbf{E}_e$，$\mathbf{H}_e$（外場）で曲がりながら radiate している電子に働く damping force をあたえ軌道を補正する。

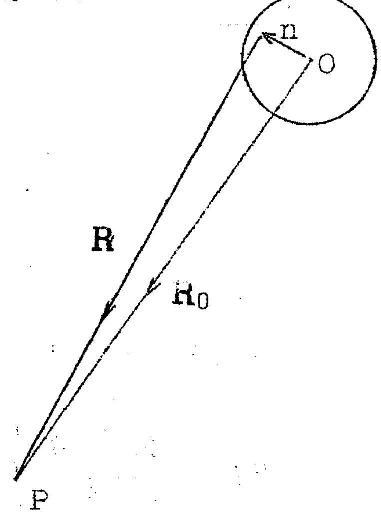
（相対論的場合）

Ⅲ．出てくる波の角分布　（§．73．L－L）　波の角分布を知るためには Ⅰでやった様に，（Ⅰでは非相対論でやった）ϕと$\mathbf{A}$を求めなければならない。$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}_0$，$\mathbf{r}$ はⅠと同じとし，

$$\left\{\phi = \left.\frac{e}{R-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c}}\right|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \equiv \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\ \rho(\mathbf{r},t)=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t)),\ \mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}\ ) \\ (\ \mathbf{R}(t')=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_e(t-\frac{|\mathbf{R}(t')|}{c})\ )\end{array}\right. \qquad (\mathrm{III}.1)$$

$$\mathbf{A}=\left.\frac{e\mathbf{V}}{c\,(R-\frac{\mathbf{V}\mathbf{R}}{c})}\right|_{t'=t-\frac{|R(t')|}{c}}$$



という Linard－Wiechert potential を使う。t は $\phi(t)$ $\mathbf{A}(t)$ という場の時刻である。

$$\left[\ \phi=\int\frac{e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t-\frac{R}{c}))}{R}dV\ は=\int\frac{e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t-\frac{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}{c}))}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}dV\ 故\right.$$

$\mathbf{R}_0-\mathbf{r}=x$ とすると $\displaystyle =\int e\,\frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{R}_0+\mathbf{r}_e(t-\frac{|x|}{c}))}{|\mathbf{x}|}dV_x$,

所が $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{R}_0+\mathbf{r}_e(t-\frac{|\mathbf{x}|}{c}))$ は $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ で δ 函数的だとすると

$$=\delta\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\left|\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}-\mathbf{R}_0+\mathbf{r}_e(t-\frac{|\mathbf{x}|}{c})\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\right)\quad 故$$

$$=\delta\left((\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\cdot(1-\frac{\mathbf{V}_e\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|})\right)=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{V}_e\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

$$\therefore\quad \phi=\left.\frac{e}{|\mathbf{x}|-\frac{\mathbf{V}_e\mathbf{x}}{c}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

この式で $\mathbf{x}\to\mathbf{R}$ とおき，$\mathbf{x}=\mathbf{R}=\mathbf{x}_0$ は $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_e(t-\frac{|\mathbf{R}|}{c})$ と同じ事を使えばよい。］

之等より $\mathbf{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\phi$, $\mathbf{H}=\mathrm{curl}\ \mathbf{A}$ を

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{VR}}{Rc}}\,,\qquad \nabla t'=-\frac{\mathbf{R}}{CR\left(1-\dfrac{\mathbf{VR}}{Rc}\right)}$$

等を使ってかくと，

$$E=e\frac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(R-\dfrac{\mathbf{RV}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{V}}{c}R\right)+\frac{e}{C^2\left(R-\dfrac{\mathbf{RV}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{V}}{c}R\right)\times\dot{\mathbf{V}}\right\}\right]_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \qquad (\mathrm{III}.2)$$

となる。之は Heitler の（10a）（10b）と同じであるが，Heitler は $\mathbf{R}$ の向きが逆に定義されている事に注意。

$t'=t-\dfrac{R(t')}{c}$ は電子の時刻で，t は（$\mathbf{R}(t)$）P点での場を考える時刻である事に注意。

R が $\dfrac{\mathbf{RV}}{c}$ にくらべて大きい時は　（$\dot{\mathbf{V}}\equiv\mathbf{W}$ を使って）

$$\mathbf{H}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}\,,\quad \mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\left[\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{V}}{c}\right)\times\mathbf{W}\right\}\right]\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathbf{nV}}{c}\right)^3}\Bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}} \qquad (\mathrm{III}\cdot 3)$$

である。　（$\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{R}}{R}$）

solid angle dO に emit される強さ（エネルギー／sec）は

$$dI=\frac{c}{4\pi}E^2R^2\,dO \quad (\text{平面波})$$

であるから，

$$\frac{d\epsilon_{\mathbf{n}}}{dt}=dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nW})(\mathbf{VW})}{C\left(1-\dfrac{\mathbf{Vn}}{c}\right)^5}+\frac{(\mathbf{W})^2}{\left(1-\dfrac{\mathbf{Vn}}{c}\right)^4}-\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{W})^2}{\left(1-\dfrac{\mathbf{Vn}}{c}\right)^6}\right\}\Bigg|_{t'=t-\frac{R(t')}{c}}dO$$

(III・4)

そこで之を時間積分をすると，角分布がでるけれども，右辺が t′ で（ electron time ）の函数故

$$dt' = dt - \frac{\mathbf{V}\mathbf{R}}{cR}dt' \quad \left(\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}_e(t')}{dt'} \ ; \quad R(t') = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_e(t')| \right)$$

より

$$dt = \left(\frac{dt}{dt'}\right) dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{V}}{c}\right) dt' \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 5)$$

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}$$

を考に入れて

$$d\epsilon_{\mathbf{n}} = \int \frac{d\epsilon_{\mathbf{n}}}{dt} dt = \int \frac{d\epsilon_{\mathbf{n}}}{dt}\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{V}}{c}\right) dt'$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} dO \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{V}})(\mathbf{V}\dot{\mathbf{V}})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{V}\mathbf{n}}{c}\right)^4} + \frac{(\dot{\mathbf{V}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{V}\mathbf{n}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{V}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{V}\mathbf{n}}{c}\right)^5} \right\} dt'$$

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}$$

$$(\text{Ⅲ}\cdot 5)$$

となる。ここで $\int dt'$ をはずせば，電子時刻毎秒のエネルギー放射がわかる。この式は Schwinger の（Ⅰ・41）の１項目と同じである。

ここで Schwinger の計算方法にふれておくと，彼は，power の式として　$P = \int \mathbf{V}(t')\mathbf{E}(t')\,dt'$ を使っている。$\mathbf{E}(t')$ としては電子の作った場。この定義の中には，reactive な部分と resistive な部分が含まれるので，resistive な部分のみをとり出して，計算した。その分離は，

電子のエネルギーの時間変化

$$\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathbf{V}\cdot\frac{m\frac{d\mathbf{V}}{dt}}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

に（3.6）の $\dot{\mathbf{V}}$ を入れて　$= e\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}$

であるから，時間積分した時に　$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) dt = \int e\mathbf{V}\cdot\mathbf{E}\,dt$

の中，$e\mathbf{V}\cdot\mathbf{E} \propto \frac{d}{dt}A+B$ となればAの方は，左辺にうつして $mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$ という“電子の”固有のエネルギー変化と考えて，残りのBを“radiated” power ととる。丁度，L，C，R 系で

$$L\frac{d\mathbf{j}}{dt}+R\mathbf{j}+\frac{1}{c}\int^t \mathbf{j}\,dt=\mathbf{E}$$

の時に $\int \mathbf{j}\mathbf{E}\,dt=\int\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}\mathbf{j}^2+\frac{1}{2c}\left(\int^t \mathbf{j}\,dt\right)^2\right)+R\mathbf{j}^2\right]dt$

となる様に，仕事 $\mathbf{j}\mathbf{E}$ の中 $\frac{d}{dt}A$ の分は reactive ，Bは resistive としてBをとっている。Olsen 参照。

積分自体が電子のエネルギーロスで，電子時刻でかかれているから，（Ⅲ・6）の integrand と一致する。Schwinger の式で X(t) となっているものは t はすべて電子の時刻である。静止オブザーバーの時刻に直すときは，時間の element が（Ⅲ・5）に従って変る事に注意する。

（Ⅲ・6）で分母が小さくなって power の大きい所は

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \simeq 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\sim 0\left(1-\frac{v}{c}\right)\quad(\theta=\mathbf{nR})$$

の所故 $$\theta\sim\sqrt{1-\frac{v}{c}}\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\qquad(Ⅲ・7)$$

となるから，前に出る。

(i) linear acceleration $\mathbf{V}/\!/\mathbf{W}$， この時は（Ⅲ・3）より

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c^2R}\frac{\mathbf{W}\times\mathbf{n}}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{V}}{c}\right)^3}\qquad(Ⅲ・8)$$

又（Ⅲ・4）より

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{\mathbf{W}^2\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\,d0\qquad(Ⅲ・9)$$

となる。（ここでこの dI は $d\varepsilon/dt$ であるがこの dt は“場の時刻”）

この式は dipole radiation の時の式（2.6）をローレンツ変換したものであって，電子の静止した系を′付きでかくと（2.6）は

$$dI' = \frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3}(W')^2 \sin^2\theta \; dO'$$

之を今の場合 $\mathbb{V} /\!/ \mathbb{W}$ 故 dipole を軸の方向に $\mathbb{V}$ だけの速さでうごいている系にうつすと，（座標（ローレンツ）変かん）（但し ε は“エネルギー”）

$$dI = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon'} \frac{d\varepsilon'}{dt'} \cdot \frac{dt'}{dt}$$

及び

$$\frac{d\varepsilon'}{dt'} = \frac{e^2}{4\pi c^3}(W')^2 \sin^2\theta' \cdot \frac{dO'}{dO} \cdot dO$$

$$\sin^2\theta' = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2}\sin^2\theta \;;\; dO' = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2}dO,$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon'} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}, \quad \frac{dt'}{dt} = \sqrt{1-v^2/c^2}\;;$$

$$W' = \frac{d^2x'}{dt'^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

を使うと，

$$dI = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \cdot \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{(W)^2}{(1-v^2/c^2)^3} \cdot \frac{(1-v^2/c^2)\sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2} \cdot$$

$$\times \frac{1-v^2/c^2}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^2} dO \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{W^2 \sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5} dO$$

（II・10）

但し，このdIは$\frac{d\varepsilon}{dt}$でdtはelectron timeで（Ⅲ・9）の

dI＝$\frac{d\varepsilon}{dt}$のdtはfield time故（Ⅲ・5）の因子（$1-\frac{v}{c}\cos\theta$）だけの差があるが，要するにローレンツ変換で（Ⅲ・9）がでてくる。

$$\left((\text{Ⅲ}\cdot 10) = \frac{d\varepsilon}{dt_{eln}} = \frac{d\varepsilon}{dt}\times\frac{dt}{dt_{eln}} = \frac{d\varepsilon}{dt}\times\frac{dt}{dt'},\ (\text{Ⅲ}\cdot 5) = \frac{d\varepsilon}{dt}\cdot \right.$$

$$\left. \left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad \therefore \frac{d\varepsilon}{dt} = (\text{Ⅲ}\cdot 9) = \frac{1}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}(\text{Ⅲ}\cdot 10)\ / \right)$$

Schwingerの式（Ⅰ・43）は（前に注意した様に彼の式は時刻はeln−timeのもの故）（Ⅲ・10）に対応し，

$$\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} = P \quad \text{で} \quad \mathring{P} = m\frac{\dot{\mathbf{V}} + [\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\dot{\mathbf{V}})]}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

であるが，今は $\mathbf{V} /\!/ \mathbf{W} = \dot{\mathbf{V}}$

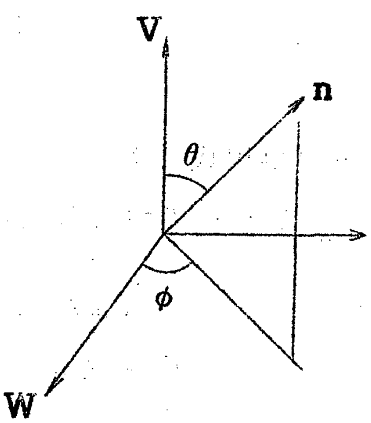
の時を考えているから $\dot{P} = m\frac{\dot{\mathbf{V}}}{(1-\beta^2)^{3/2}}$

$$\therefore W^2 = \dot{V}^2 = \frac{(1-\beta^2)^3}{m^2}(\dot{P})^2 \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 11)$$

という書かえで（Ⅲ・10）はSchwingerの（Ⅰ・43）に移行する。

(ii)　Perpendicular acceleration　$\mathbf{V}\perp\mathbf{W}$

（Ⅲ・4）より



$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = dI = \frac{e^2W^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{1}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^4} - \frac{(1-\frac{v^2}{c^2})\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^6}\right\}d0 \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 12)$$

又はElectron timeでかいて

$$\frac{d\varepsilon}{dt_{eln}} = \frac{e^2W^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{1}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^3} - \frac{(1-\frac{v^2}{c^2})\sin^2\theta\cos^2\phi}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^5}\right\}d0 \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 13)$$

とすると，之は Schwinger の（I・44）と対応する。それをみるにはこの場合

$$\mathbf{V} \perp \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad 故 \quad \dot{\mathbf{P}} = m\frac{\dot{\mathbf{V}} + [\mathbf{V}\times[\mathbf{V}\times\dot{\mathbf{V}}]]}{(1-\beta^2)^{3/2}} = m\frac{\dot{\mathbf{V}}}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad (\mathbf{W})^2 = \frac{(\dot{\mathbf{P}})^2}{m}(1-\beta^2) \qquad (\mathrm{III}\cdot 14)$$

を（III・13）に入れると Schwinger の（I・44）と一致する。

IV. Uniform circular motion. （§. 74, L−L）

一様且つ一定の磁場Hの中で動いている電子は（3.6）の $\mathbf{E}=0$，$\mathbf{H}=\mathbf{H}_{external}$ とおいて，（即ち radiation damping 及び reactive force をのぞいて（小さいとしてすてる。））

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{e}{c}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}] \qquad (\mathrm{IV}\cdot 1)$$

故 $\mathbf{V}\rightarrow$ をかけて $\frac{dv}{dt}=0 \quad \therefore \frac{v}{c} = \text{constant}.$

$$故に \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot[\mathbf{r}\times\mathbf{H}] + \text{constant} \qquad (\underset{\dot{\mathbf{V}}}{\overset{}{\mathbf{W}}}\perp\mathbf{V})$$

であるが constant ＝ 0 とおいて（磁場の方向に Orbit はずれないとして）

$$r = \frac{mc\ v}{\sqrt{eH \quad 1-v^2/c^2}}; \quad \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (\mathrm{IV}\cdot 2)$$

但し，ω_0 は電子の角速度，r は軌道半径，（後の早川氏のお話では $\frac{1}{2\pi}$ eH/mc を Cycrotron frequency として ν_0 ととっておられる。）

(i) Total Radiated Energy. $\mathbf{V}\perp\mathbf{H}$ であるので §3 の（3.7）より $\triangle\epsilon$ を求めると（$\int_{-\infty}^{\infty}$ をはずして，dt が electron time である事に注意して）

$$\frac{\triangle\varepsilon}{\triangle t_{eln}} = I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5(1-\frac{v^2}{c^2})} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{v^4}{r^2}\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2}$$

$$= \frac{4\pi e^2}{3}\frac{(v/c)^3}{r}\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2}\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \qquad (\text{IV}\cdot 3)$$

$2\pi/\omega_0$ は電子の一囲まはる週期　故一週すると

$$\triangle\varepsilon\Big|_{1週} = \frac{4\pi e^2}{3}\frac{(V/c)^3}{r}\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^2} \qquad (\text{IV}\cdot 4)$$

（小塩氏 et. al の式は $(V/c)^3\sim 1$ とするとでてくる。）（Ⅳ・3）は又，（電子のエネルギー）$^2 = \varepsilon^2 = mc^2/(1-v^2/c^2)$ を使うと

$$I = \frac{2e^4H^2}{3m^4C^7}(\varepsilon^2 - m^2C^4) \qquad (\text{IV}\cdot 5)$$

となり，之は毎秒 radiate されるエネルギー故電子のエネルギーの式は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varepsilon}{dt_{eln}} = -\frac{2e^4H^2}{3m^4C^7}(\varepsilon^2 - m^2C^4) \\ &\text{で} \\ &\varepsilon = mc^2\cdot\coth\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3C^5}t + \text{const}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{IV}\cdot 6)$$

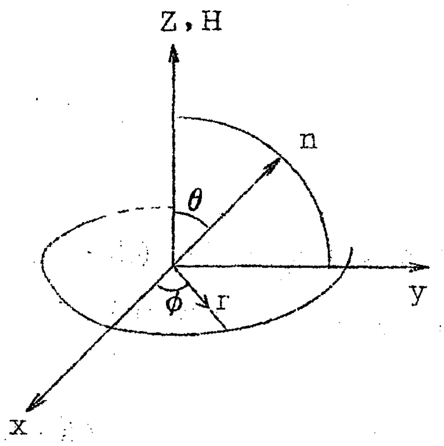
に従って電子のエネルギーは減少する。

尚は（Ⅳ・6）を $-\frac{d\varepsilon}{dt_{eln}} = +\frac{\varepsilon}{t_s} + \text{const}$ とかけば

$$t_s = \frac{1}{\frac{2e^4H^2}{3m^4C^7}\varepsilon} = \frac{3m^5C^9}{2e^4H^2}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

は早川氏のお話の electron の energy loss の時にでてくるものに対応する。

(ii) Angular Distribution　毎秒放射される輻射の角分布を出すのには，（Ⅲ・6）式（電子時刻でかかれたもの）を使って，One cycle について（$t'=0\rightarrow\frac{2\pi}{\omega_0}$）積分して，これを $2\pi/\omega_0$ でわって平均する。



図の様にとると，（n は z－y 面内に，r は x－y 面内に）

$\phi=\omega_0 t$ として（t は electron time）

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{V}&=-v\sin\phi,\ v\cos\phi,\ 0\\ \mathbf{r}&=r\cos\phi,\ r\sin\phi,\ 0\\ \mathbf{n}&=\ 0\ ,\ \sin\theta,\ \cos\theta\end{aligned}\right\}\quad(\text{IV}\cdot 7)$$

であり，又，acceleration は（3.6）より

$(\mathbf{E}=0\quad \mathbf{V}\quad \mathbf{H})$

$$\mathbf{W}=\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ \frac{1}{c}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right]$$

であるから，（Ⅲ・6）に入れて，

$$dI=\frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}dI}{\frac{2\pi}{\omega_0}}=d0\ \frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2C^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\mathrm{cor}^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\sin\theta\cos\phi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\phi\right)^5}\,d\phi$$

$$=d0\ \frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2C^5}\left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{5/2}}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{7/2}}\right]$$

（Ⅳ・8）

となる。

故に，
$$\frac{1}{2} < \frac{\left(\frac{dI}{do}\right)_{\pi/2}}{\left(\frac{dI}{do}\right)_0} = \frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} < \infty$$

となる。$v/c \to 1$ では $\theta = \pi/2$ があっとう的に大きい。Orbit 面（X，Y）と $\mathbf{n}$ の方向が $\triangle\theta \sim \sqrt{1-v^2/c^2}$ の角をなす方向に一番多くでる。

附は $\mathbf{V} \perp \mathbf{W}$ を使うと，（Ⅲ・3）より $\mathbf{E}$ の 0 になる方向は

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{c} \pm \lambda \frac{\mathbf{W}}{W} \qquad (\text{Ⅲ}\cdot 9)$$

であって　λ は　$\mathbf{n}^2 = 1$ より $\sqrt{1-v^2/c^2}$ ときまる。（Westfold p. 243 中項の式）

(iii) Spectral distribution. Spectrum を出すには，$\mathbf{A}$ 等を成分にフーリエ展開する。

遠くでのベクトル・ポテンシアル

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{CR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV \qquad (1.4)$$

を

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{j}(t) &= R_e\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{j}_n e^{-i\omega_0 n t}\right\} \\ \mathbf{A}(t) &= R_e\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{-i\omega_0 n t}\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅳ}\cdot 10)$$

とフーリエ展開し，

$$\left(\mathbf{A}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}_n e^{-i\omega_0 n t} + \mathbf{A}_n^{*} e^{i\omega_0 n t}\right);\right.$$

$$\left.\mathbf{A}_n = \frac{2}{T}\int_0 e^{i\omega_0 n t}\mathbf{A}(t)\,dt\right)$$

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{CR_0}\frac{2}{T}\int_0 \left(\int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}}{c}} dV\right) e^{in\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{2}{CB_0} \int_0 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int (\mathbf{j}_\ell e^{-i\ell\omega_0 (t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c})} + e.c) dV . e^{in\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{e^{ikR_0}}{CR_0} \int dV\, \mathbf{j}_n \cdot e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}}$$

但し $k = \frac{n\omega_0}{c}$; $\boldsymbol{\kappa} = \frac{n\omega_0 \mathbf{n}}{c}$.

ここで $\mathbf{j}_n = \frac{2}{T} \int_0 e\mathbf{V}(t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t'))e^{in\omega_0 t'} dt'$

を代入すると

$$\mathbf{A}_n = \frac{2e}{CR_0 T} e^{ikR_0} \int_0 e^{in\omega_0 t - i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}_e(t)} \mathbf{V}(t)\, dt \qquad (\text{IV} \cdot 11)$$

となる。粒子の座標は（IV・7）の形故，

$$V_x dt = -v \sin\phi \frac{1}{\omega_0} d\phi; \quad V_y dt = v\cos\phi \frac{1}{\omega_0} d\phi, \quad V_z dt = 0$$

$$\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}_e(t) = kr \sin\theta \sin\phi \qquad (\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{n}\frac{\omega_0 n}{c})$$

$$= n\frac{\omega_0}{c} r \sin\theta \sin\phi \qquad (\text{IV} \cdot 12)$$

$$= n\frac{v}{c} \sin\theta \sin\phi \qquad (\because \omega_0 = \frac{v}{r}) \ (\text{IV} \cdot 2)$$

故に，$(T = \frac{2\pi}{\omega_0})$

$$A_{xn} = \frac{-ev}{\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi - \frac{v}{c}\sin\theta\sin\phi)} \sin\phi\, d\phi = \frac{2iev}{CR_0} e^{ikR_0} J_n' (\frac{nv}{c}\sin\theta)$$

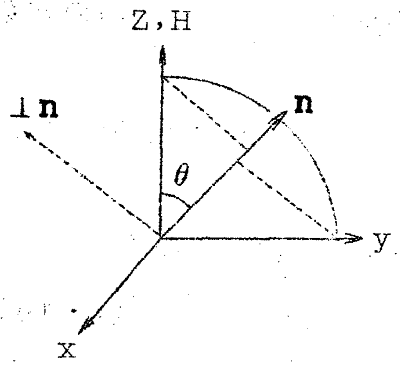
$$A_{yn} = \frac{ev}{\pi c R_0} e^{ikR_0} \int_0^{2\pi} \qquad " \qquad \cos\phi\, d\phi = \frac{2e}{R_0 \sin\theta} e^{ikR_0} J_n (\frac{nv}{c}\sin\theta)$$

$$A_{zn} = 0 \qquad (\text{IV} \cdot 13)$$

$\boldsymbol{E}$ は　$$\boldsymbol{E}_n = \frac{i\omega_0 n}{c}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_n)\times\boldsymbol{n})\qquad \text{((1.7) のフーリエ成分)}$$
$$= \frac{i\omega_0 n}{c}(\boldsymbol{A}_n - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{n}) \qquad (\text{IV}\cdot 14)$$

であるから，

$$E_{xn} = \frac{i\omega_0 n}{c} A_{xn}$$
$$E_{yn} = \frac{i\omega_0 n}{c}(A_{ym} - A_{ym}\sin^2\theta) = \frac{i\omega_0 n}{c} A_{yn}\cos^2\theta \qquad (\text{IV}\cdot 15)$$
$$E_{zn} = \frac{i\omega_0 n}{c}(-)A_{yn}\sin\theta\cos\theta$$



故に $\boldsymbol{n}$ 方向の E_n の成分は

$$E_z\, n\cos\theta + E_{yn}\sin\theta = 0.$$

E⊥方向は，

$$E_{zn}\sin\theta - E_{yn}\cos\theta = -\frac{i\omega_0 n}{c} A_{yn}\cos\theta.$$

故に，

$$E_{xn} = \frac{i\omega_0 n}{c} A_{xn} \qquad \text{（軌道面内に偏る）}$$
$$E\ n = -\frac{i\omega_0 n}{c} A_{yn}\,\mathrm{cor} \qquad \text{（}\boldsymbol{n}\text{に直角方向に偏る）}$$
$$(\text{IV}\cdot 16)$$

となる。

放出される radiation の n－harmonics の強さは（energy/sec）

$$dI_n = \frac{c}{8\pi}|\boldsymbol{E}_n|^2 R_0^2\, d0$$

であって，之に（IV・16）（IV・13）を入れると

$$dI_n = \frac{n^2e^4H^2}{2\pi e^3m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\cot^2\theta\, J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right] d0 \qquad (\text{IV}\cdot 17)$$

となり，〔 〕の中のはじめの項は $E_\perp$，二項目は E_x よりきたもので，夫々の偏りの成分を示している。之は Scott の古い１９１２年の式で，恒等式

$$\frac{n^2e^4H^2}{2\pi c^3m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\omega_0\frac{e^2}{r}\left(\frac{v}{c}\right)^3\frac{n^2}{2\pi}\left(\frac{c}{v}\right)^2=\omega_0\frac{e^2}{r}\beta^3\frac{n^2}{2\pi}\frac{1}{\beta^2}\ ;\quad \theta\Longrightarrow\psi$$

を使えば Schwinger の（Ⅲ・28）となり，又，Westfold の（23）式にもなる。

（Ⅳ・17）より $\theta=\pi/_2$ 即ち軌道面内よりみると光は全部軌道面方向に偏っている。

（ 尚，スペクトル分解をした式には t がはいってこなくて，その積分の形であるから，Schwinger の式とか外の式とかの差，（場の時刻，electron の時刻によるもの）はなくなる。）

Total intensity のスペクトルを出すには之を dθ で積分する。

$$I_n=\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2c^2v}\left[\frac{nv^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)-n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{\frac{v}{c}}J_{2n}(2n\xi)\,d\xi\right] \tag{Ⅳ・18}$$

$$\left(\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2C^2v}=2\frac{e^2\omega_0^2}{v}=2e^2\frac{\omega_0^2}{r}\text{ともかける。}\right)$$

但し，之では偏りは mix してしまっていて別々には分けられていない。（n の大きい時には別々に積分したものが Westfold によってあたえられている。次§参照）。

尚，　$2n\xi=x$ とおいて　　（Ⅳ・19）

（Ⅳ・18）を

$$I_n=m\frac{e^2\omega_0}{r}\left[2\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2n\frac{v}{c}}J_{2n}(x)\,dx\right] \tag{Ⅳ・20}$$

とかけば Olsen の（3.22），Schwinger の（Ⅲ・12）である。従って，Olsen に従って

$$\sum_{m=1}^{\infty} I_n = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \tag{IV・21}$$

となって，Total intessity の式（IV・3）と一致する。（式の check!）

(IV) nの大きい時のスペクトルの漸近形

nの大きい時は

$$J_{2n}(2n\xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{1/3}}\Phi\left(n^{\frac{2}{3}}(1-\xi^2)\right)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi t\right)d\xi = \frac{t^{1/2}}{\sqrt{3\pi}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right) = \sqrt{\pi}A_i(x) \tag{IV・22}$$

とかける。但しΦ，A_i は夫々 Landw−Lifschity 及び Westfold の文中の Airy function．之を使って，（IV・18）より

$$I_n = \frac{-2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}u^{1/2}}{\sqrt{\pi}\,m^2C^3}\left(\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^{\infty}\Phi(u')\,du'\right) \tag{IV・23}$$

$$u = n^{2/3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

となり，

$$u \ll 1 \text{ では } I_n = 0.52\frac{e^4H^2}{m^2C^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{1/3}\ ;\ 1 \ll n \ll \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-2/3} \tag{IV・24}$$

$u \gg 1$ では Φ の asymptotic form を使い

$$I_n = \frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}}{2\sqrt{\pi}\,m^2C^3}e^{-\frac{2}{3}n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \qquad n \gg \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \tag{IV・25}$$

故に，

$n \sim \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}$ 附近に maximum があり

$$n_c = \frac{3}{2} \Big/ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \tag{IV・26}$$

より，$$\omega_c = \omega_0 \omega_c = \frac{3}{2}\omega_0 \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{eH}{mc}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{IV・27}$$

（早川氏の $V_s = \frac{1}{2\pi}\omega_0$ である。）

という“cut－off” frequency より上のスペクトルに exponential に小さくなる。この ω_c は非常に n_c が大きいので近似的にこの辺では連続スペクトルと見なせる。

尚，上の I_n の Φ の代りに K を使うと，

$$I_n = \frac{e^2\omega_0}{\sqrt{3}\pi r}\, n \frac{v}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_{\frac{2}{3}u^{3/2}}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx \tag{IV・28}$$

の形であるが之は Olsen の（3.6.8）であり，又，Schwinger の（Ⅲ・19）は $\frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{n}{n_c}$ を使って（$\binom{u}{n_c}$ は $\binom{\text{IV・23}}{\text{IV・26}}$）書直せばよい。（但し，Schwinger の（Ⅲ・19）の分母は $\frac{1}{(1-\beta^2)^2}$ の筈）

又，$$I_n = \frac{3e^3H}{2\sqrt{3}\pi rmc}\frac{v}{c}\left\{\frac{n}{n_c}\int_{\frac{n}{n_c}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\,d\eta\right\}$$ とかいてみると，（IV・29）

この｛　｝の中を偏りに分けて積分したものが Westfold の（26）式である。

但し Westfold の $e^2/4\pi$ がここに使っている e^2 にあたる。（又，Westfold の $\alpha = 0$ 即ち の代りに のみをとった。（IV・1）の下参照）。

$$\frac{n}{n_c}\int_{\frac{n}{n_c}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\,d\eta \rightarrow F^{(1)}\left(\frac{n}{n_c}\right) + F^{(2)}\left(\frac{n}{n_c}\right) \tag{IV・30}$$

$F^{(1)}$, $F^{(2)}$ の numerical value が Westfold に与えてある。

尚，上の式は $n \gg 1$ として出したが，$n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \gg 1$ の時の式が Landau－Lifschitz に別の形であたえてある。（p. 231.

Prob. 2)。

(V) スペクトル強度の Maximum

(IV・29) をみてわかることは I_n は{ }の中の形でnにdepend するから，I_n を Maximum にする n/n_c を求めると，(Olsen (3.7))

$$\left(\frac{n}{n_c}\right)_{I_n \max} = 0.269$$

故に $$n_{max} = \frac{3}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \times 0.269 \qquad (IV\cdot 31)$$

故にスペクトルの Maximum 強度の ω は (IV・32)

$$\omega = \omega_0 N_{max} = \frac{3}{2}\frac{eH}{mc}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \times 0.269 = \omega_c \times 0.269$$

で，cut-off requency ω_c の 0.269 倍下の所にある。(この値は又，Westfold の $F^{(1)}(x) + F^{(2)}(x) = F(x)$ ($x = \frac{n}{n_c}$) の x をみてもよい。大体 $\frac{n}{n_c} \approx 0.27$ に mex. がある。)

尚，(IV・29) を書直して

$$I_n = \frac{\sqrt{3}\, e^2 \cdot eH}{2\pi mc}\frac{\omega_0}{c}\left\{\frac{\nu_n}{\nu_s}\int_{\frac{\nu_n}{\nu_s}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta\right\};$$

$$\nu_s = \frac{1}{2\pi}\omega_c = \frac{\omega_0}{2\pi}n_c = \frac{3}{4\pi}\frac{eH}{m_c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\nu_n = \frac{\omega_0}{2\pi}n$$

$$= \sqrt{3}\, e^2 . \ \nu_0 \frac{\omega_0}{c}\left\{\frac{\nu_n}{\nu_s}\int_{\frac{\nu_n}{\nu_s}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta\right\}$$

$$\Sigma_n I_n = \sum_{\nu_n} I_n = \int d\nu \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} I_n = \int d\nu\, I_\nu$$

$$I_\nu = \sqrt{3}\, e^2 \nu_c \cdot \frac{2\pi}{c} \left\{ \frac{\nu}{\nu_s} \int_{\frac{\nu}{\nu_s}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, e^2}{\hbar c} h \nu_c \cdot \left\{ \frac{\nu}{\nu_s} \int_{\frac{\nu}{\nu_s}}^{\infty} K_{5/3}(\eta)\, d\eta \right\} \equiv S(E, \nu) \quad \left(E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

とすると，之は軌道面の傾きの角εによる $\sin\theta$ の係数（Westfoldでは $\sin\alpha$ ）をのぞいて，早川氏の使われた強度式になる。

$$= \sqrt{3} \frac{e^2}{\hbar c} h \nu_c \cdot \quad F\left(\frac{\nu}{\nu_s}\right)$$

V. Limit of Applicability of Formulas.

古典論は

$$\hbar \omega_c \ll E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

のはんいで成立つものと考えられるので，この ω_c に（Ⅳ・27）を入れると

$$\omega_c = \frac{3}{2} \frac{eH}{m^3 C^5} \frac{m^2 C^4}{1 - v^2/c^2} = \frac{3}{2} \frac{eH}{m^3 C^5} E^2$$

より

$$E \ll \frac{2m^2 C^5}{3eH\hbar} = \frac{(mc^2)^2}{\left(\frac{e\hbar}{mc}\right) \cdot H}$$

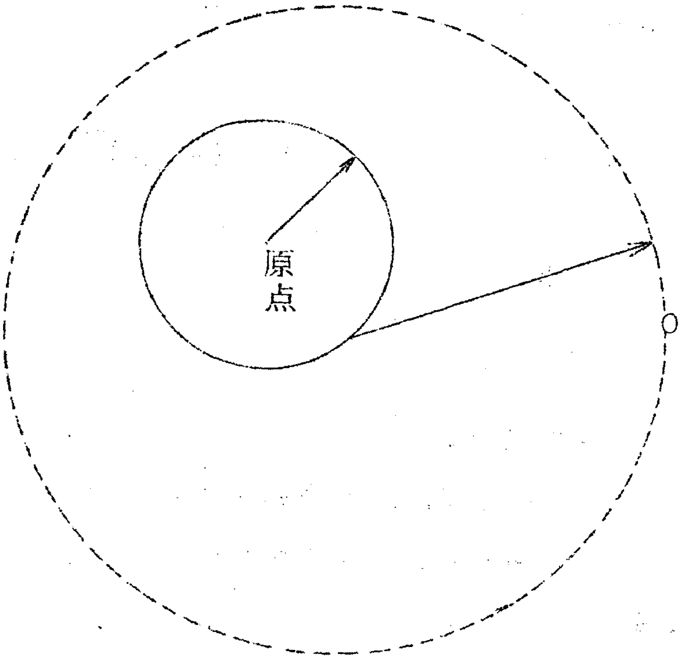
∴

$$\frac{E}{mC^2} \ll \frac{mC^2}{\frac{e\hbar}{mc} H} \qquad (V \cdot 1)$$

この条件はSchwinger（Ⅱ・56）があたえたもので，$H \sim 10^4$ gauß で $E \ll 10^6$ Gev. となる。

然し，量子論的にみると，（Olsen）radiation の放出される電子

の軌道は量子論ではそのエネルギー $\sqrt{\bar{n}_{eH\hbar c}}$ と，＊ その Orbit の centre の位置 $r=\sqrt{\frac{c\hbar}{eH}}\sqrt{2\ell+1}$ の ℓ が量子数となる。但しここで centre の位置といったけれども，r は考えている座標原点からはかって centre のある位置迄のきょりで，当然円になり，この円上のどこかはわからない。



そして，輻射を出して電子が転移する時，ℓ のちがう Orbit に移る。

$$\bar{n},\ \ell \ \leftarrow\ \bar{n}+n,\ \ell' \qquad (n\omega_0 \text{ という radiation を出す。})$$

但し，ℓ，ℓ' は“方位量子数”にあたる共通の m（整数）を通じて

$$\ell=\bar{n}-m \quad ; \quad \ell'=\bar{n}+n-m$$

とかんけいしている。

Orbit の半径はふつう $r\left(=\sqrt{\frac{c\hbar}{eH}}\sqrt{2\ell+1}\right)$ よりずっと大きいから，転移の前後の Orbit のよこずれは大体 r の差で求まるであろう。

$$\left(\sqrt{\bar{n}+n-m}-\sqrt{\bar{n}-m}\right)\sqrt{\frac{c\hbar}{eH}} \simeq \frac{n}{\sqrt{\bar{n}}}\sqrt{\frac{c\hbar}{eH}} \qquad (V\cdot 2)$$

＊） 磁場の中の電子のエネルギーは近似的に $\bar{n}$ を整数として $\bar{n}eH\hbar c$ である。（例えば Olsen）。

所で，磁場の中で電子は radial な方向には非相対論的な運動しかしてないので， sharp な（radial 方向の）Orbit が一周してくると大体（自由に packet がひろがったとして）

$$\triangle x \sim \left(\frac{\hbar}{m} T\right)^{1/2} \qquad \left(T = \frac{2\pi}{\omega_0} : \text{週期}\right)$$

位の（radial 方向の）巾をもっている。即ち One－cycle の加速と加速の間に

$$\triangle x \sim \left(\frac{\hbar}{m\omega_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\hbar E}{meHc}\right)^{1/2} = \left(\frac{\hbar c}{eH}\right)^{1/2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^{1/2} \qquad (\text{V}\cdot 3)$$

$$\left(\omega_0 = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-v^2/c^2} \ (\text{IV}\cdot 2)\right)$$

位ひろがっている。

そこで，Quantum Jump をする時の Orbit のよごれ（V・2）がこの packet のぼけ（V・3）の中にあれば，電子の始・終状態の Overlap が大きくて，大体 classical に扱ってよいであろうから，その条件は（V・2）≪（V・3）より

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \ll \left(\frac{E}{mC^2}\right)^{1/2} \qquad \left(\sqrt{n}\, eH\hbar c \ \text{電子のエネルギー 故} \gg n\,\omega_0\right) \qquad (\text{V}\cdot 4)$$

$E \approx \sqrt{n}\, eH\hbar c$ 及び $n_c \approx \left(\frac{E}{mC^2}\right)^3$ を使うと，$n = n_c$ に対して

$$\frac{E}{mC^2} \ll \left(\frac{mC^2}{\frac{eH}{mC} H}\right)^{1/3} \qquad (\text{V}\cdot 5)$$

が量子的な Orbit のとび迄考に入れて，まだ classical 的に考えられるきよくげんになる。　$H \sim 10^4$ gauβ 位で

$$E \ll 1\,\text{Gev}$$

となり，この辺のエネルギーだと，classical ではあるが，この辺から quantum が顔を出しそうなはんいに近づいている。